МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
функционального анализа
и операторных уравнений

Каменский М.И.
подпись, расшифровка подписи
25.05.2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.29 Основы функционального анализа

1. Код и наименование направления: 01.03.04 прикладная математика

2. Профиль подготовки: применение математических методов к решению инженерных и экономических задач

3. Квалификация выпускника: бакалавр

4. Форма образования: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: функционального анализа и операторных уравнений

6. Исполнители программы: Сапронова Татьяна Юрьевна, к.ф.-м.н., доцент, математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений

7. Рекомендована: НМС математического факультета, протокол № 0500–06 от 25.05.2023

8. Учебный год: 2024–2025, 2025–2026 **Семестр(ы):** четвертый, пятый

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цели освоения учебной дисциплины: доведение до студентов идей и методов функционального анализа, который является языком современной математики, где широко используются понятия функционального пространства (бесконечномерного) и отображения таких пространств.

Задачи учебной дисциплины: развитие у студентов двойного зрения: с одной стороны умения следить за внутренней логикой развития теорий функционального анализа, а с другой не упускать из вида обслуживаемую этими теориями проблематику классического и даже прикладного анализа, в частности, вопросов, связанных с интегральными уравнениями Фредгольма и Вольтерры.

10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП: дисциплина «Основы функционального анализа» является обязательной дисциплиной блока Б1.

Основные дисциплины и их разделы, необходимые для усвоения курса «Основы функционального анализа»: математический анализ, линейная алгебра.

Дисциплина «Основы функционального анализа» является необходимой для усвоения всех математических курсов, ибо терминология функционального анализа является языком современной математики.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике.	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знать: базовые знания, полученными в области математических и (или) естественных наук.
		ОПК-1.2	Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Уметь: использовать теоретические знания в профессиональной деятельности. .
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	Владеть: навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 6/216

Форма промежуточной аттестации: зачет, экзамен.

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость		
	Всего	По семестрам	
		сем. 4	сем. 5

Аудиторные занятия		100	68	32
в том числе:	лекции	50	34	16
	практические	50	34	16
	лабораторные	0	0	0
Самостоятельная работа		80	40	40
в том числе: курсовая работа (проект)		0	0	0
Форма промежуточной аттестации *(экзамен – 36 час.)*		36	0	36
Итого:		216	108	108

13.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
1. Лекции			
1.1	Метрические пространства	Метрика, сходимость, полнота, открытые и замкнутые множества, сепарабельность пространств, свойство компактности и вполне ограниченности множеств.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7077
1.2	Линейные нормированные пространства	Линейные пространства, норма, ряды в нормированных пространствах, эквивалентные нормы.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7077
1.3	Пространства со скалярным произведением	Скалярное произведение, свойство ортогональности, ряды Фурье.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7077
1.4	Теория операторов	Линейные ограниченные операторы и функционалы. Норма оператора. Обратимые операторы. Теорема Банаха о непрерывной обратимости оператора. Продолжение линейного ограниченного функционала (теорема Хана – Банаха). Вполне непрерывные операторы.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7077
2. Практические занятия			
2.1	Метрические пространства	Метрика, сходимость, полнота, открытые и замкнутые множества, сепарабельность пространств, свойство компактности и вполне ограниченности множеств.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7077
2.2	Линейные нормированные пространства	Линейные пространства, норма, ряды в нормированных пространствах, эквивалентные нормы.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7077
2.3	Пространства со скалярным произведением	Скалярное произведение, свойство ортогональности, ряды Фурье.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7077
2.4	Теория операторов	Линейные ограниченные операторы и функционалы. Норма оператора. Обратимые операторы. Теорема Банаха о непрерывной обратимости оператора. Продолжение линейного ограниченного функционала (теорема Хана – Банаха). Вполне непрерывные операторы.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=7077

13.2. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Контроль	Практические	Самостоятельная работа	Всего

1.	Метрические пространства	16		16	16	48
2.	Линейные нормированные пространства	10		10	14	34
3.	Пространства со скалярным произведением	8		8	10	26
4.	Теория операторов	16	36	16	40	108
	Итого:	50	36	50	80	216

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий и активную работу во время занятий, но и самостоятельную учебную деятельность, на которую отводится 80 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Основы функционального анализа» предполагает выполнение следующих заданий:

1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам 1–4 с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем;

2) подготовку к текущим аттестациям: выполнение домашних заданий, самостоятельное освоение понятийного аппарата по каждой теме.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (4 семестр – зачет, 5 семестр – экзамен).

Учебные пособия по данному курсу размещены на сайте https://vk.com/func_an . На этом же сайте преподаватель публикует вспомогательные материалы и указания по изучаемым в данный момент вопросам, программы коллоквиумов и т.д.

Преподавание дисциплины заключается в чтении лекций и проведении практических занятий. На лекциях рассказывается теоретический материал, на лабораторных занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях. При изучении курса «Основы функционального анализа» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения обучающимся рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После лабораторного занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникают вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутствующий час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить задачи.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : [учебник] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова .— Изд. 7-е .— М. : Физматлит, 2006 .— 570 с.
2.	Треногин В.А. Функциональный анализ : учебник для студ., обуч. по специальностям «Математика» и «Прикладная математика» / В. А. Треногин .— Изд. 4-е, испр. — М. : Физматлит, 2007 .— 488 с. : ил. — Библиогр.: с. 482-483 .

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3.	Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М.: Мир, 1979. – 589 с.
4.	Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.
5.	Антоневич А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Минск: БГУ. – 2003. – 430 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы**:**

№ п/п	Ресурс
6.	https://vk.com/func_an – страница «В Контакте», посвященная данному курсу
7.	https://lib.vsu.ru/ – электронный каталог ЗНБ ВГУ

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1.	Сборник заданий для лабораторных работ по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения": Для студ. 2 и 4 к. мат. фак. всех форм обучения / Вор. гос. ун-т., каф. функ. анализа и оператор. уравнений; сост. В. В. Смагин.— Воронеж, 2001.— 27 с. https://vk.com/func_an
2.	Треногин В.А. Функциональный анализ : учебник для студ., обуч. по специальностям "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Треногин .— Изд. 4-е, испр. — М. : Физматлит, 2007 .— 488 с. : ил. — Библиогр.: с. 482-483 .
3.	Смагин В.В. Линейные операторы и функционалы : учебное пособие для вузов : [для студ. 3 курса мат. фак. для направления 010100 - Математика; специальности 010101 - Математика] / В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011 .— 74 с.
4.	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

17. Образовательные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ».

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows, Microsoft Office, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet Expolorer, ноутбук.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации; специализированная мебель

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций.

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция	Индикаторы достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Метрические пространства	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	домашние задания, контрольная работа, собеседование по билетам к зачету
2.	Линейные нормированные пространства	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	домашние задания, контрольная работа, собеседование по билетам к зачету
3.	Пространства со скалярным произведением	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	домашние задания, контрольная работа, собеседование по билетам к зачету
4.	Теория операторов	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	домашние задания, контрольная работа, собеседование по билетам к экзамену
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет, экзамен				Перечень вопросов к зачету и экзамену

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: домашние задания, контрольная работа.

20.1.1 Перечень заданий для контрольных работ

Комплект заданий для контрольной работы №1

ВАРИАНТ 1

1. Вычислить расстояние между элементами $x = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2^n}, ...)$ и $y = (1, 0, 0, ...)$ в пространствах m и l_1.

2. Вычислить расстояние между элементами $x(t) = t^2$ и $y(t) = t$ в пространствах $C[0,1]$ и $C_1[0,1]$.

3. В $C[0,1]$ доказать сходимость последовательности $x_n(t) = \frac{2nt^2}{2n+t}$.

ВАРИАНТ 2

1. Вычислить расстояние между элементами $x = (1, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{3^n}, ...)$ и $y = (0, 0, 0, ...)$ в пространствах m и l_2.

2. Вычислить расстояние между элементами $x(t) = t^3$ и $y(t) = t$ в пространствах $C[0,1]$ и $C_1[0,1]$.

3. В $C[0,1]$ доказать сходимость последовательности $x_n(t) = \frac{nt+t^2}{2+n+t}$.

Комплект заданий для контрольной работы №2

ВАРИАНТ 1

1. Доказать в ЛП $\mathbf{R^n}$ эквивалентность норм $\|x\|_1$ и $\|x\|_3$.

2. Пусть X — ЛНП, $\{x_n\} \subset X$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|$ сходится. Доказать, что $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность.

ВАРИАНТ 2

1. Докажите, что в ЛП $C[0,1]$:
а) выражение $max_{0 \leq t \leq 1}|x(t)| + |x(0) - x(1)|$ јаваляется нормой;
б) нормы $\|x\|_1 = max_{0 \leq t \leq 1}|x(t)| + |x(0)|$ и $\|x\|_2 = max_{0 \leq t \leq 1}|x(t)| + |x(0) - x(1)|$ эквивалентны.

2. Пусть в ПСП H для $x_1, x_2 \in H$ выполняется равенство $Re(x_1, x_2) = \|x_1\|^2 = \|x_2\|^2$. Докажите, что $x_1 = x_2$.

Комплект заданий для контрольной работы №3

В – I

1. Найдите норму оператора $A : \mathbf{R}^3_1 \longrightarrow \mathbf{R}^2_1$, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Докажите, что функционал $f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,dt + x(0)$ на пространстве $C[-1,1]$ является линейным непрерывным, и найдите его норму.

В – II

1. Найдите норму оператора $A : \mathbf{R}^2_1 \longrightarrow \mathbf{R}^3_1$, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Докажите, что функционал $f(x) = 3(x(0) - x(1))$ на пространстве $C[0,1]$ является линейным непрерывным, и найдите его норму.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

контрольная работа, собеседование по билетам к зачету, собеседование по экзаменационным билетам.

20.2.1 Перечень вопросов к зачету

Часть 1

1. Эквивалентные (равномощные) множества (определение).
2. Примеры равномощных множеств.
3. Теорема Бернштейна.
4. Счетные множества (определение).
5. Примеры счетных множеств.
6. Множества мощности континуума (определение).
7. Примеры множеств мощности континуума.
8. Определение метрического пространства.
9. Примеры метрических пространств (R^n_p, $C[a,b]$, l_p, m).
10. Открытые и замкнутые шары в метрическом пространстве, ограниченные множества (определения).
11. Сходимость в метрических пространствах (определение).
12. Свойства сходящихся последовательностей (4 свойства).
13. Сходимость в пространстве $\mathbb{R}^n$ (взаимосвязь между покоординатной сходимостью и сходимостью по метрике).
14. Сходимость в пространстве $C[a,b]$ (взаимосвязь между поточечной сходимостью, равномерной сходимостью и сходимостью по метрике).
15. Сходимость в пространстве l_p (взаимосвязь между покоординатной сходимостью и сходимостью по метрике).
16. Определение фундаментальной последовательности.
17. Определение полного метрического пространства.
18. Примеры полных и неполных метрических пространств.

19. Точки прикосновения и замыкание множества (определения).
20. Свойства операции замыкания (4 свойства).
21. Теорема о точке прикосновения множества.
22. Предельные и изолированные точки (определения).
23. Замкнутые множества (определение и примеры).
24. Внутренние точки и внутренность множества (определения).
25. Свойства операции взятия внутренности множества (4 свойства).
26. Открытые множества (определение и примеры).
27. Теорема о связи открытости множества и замкнутости его дополнения.
28. Теорема об объединении и пересечении открытых множеств.
29. Теорема о структуре открытого множества на прямой.
30. Теорема о полноте подпространства, порожденного замкнутым множеством.
31. Теорема о вложенных шарах.
32. Всюду плотные и нигде не плотные множества (определения).
33. Изометричные метрические пространства (определение).
34. Определение сепарабельного пространства.
35. Примеры сепарабельных пространств.
36. Непрерывные отображения метрических пространств (определения по Коши и по Гейне).
37. Равномерно непрерывная функция (определение). Условие Липшица.
38. Теорема о непрерывных функциях и прообразах открытых множеств.
39. Принцип сжимающих отображений.
40. Относительно компактные и компактные множества (определения).
41. Теорема о функционале, непрерывном на компактном множестве.
42. Критерий относительной компактности в конечномерном пространстве.
43. Определение равностепенно непрерывного множества.
44. Критерий относительной компактности в $C[a,b]$ (теорема Арцела).

Часть 2

1. Линейное пространство (определение и простейшие свойства).
2. Примеры линейных пространств.
3. Отрезок в ЛП, выпуклое множество (определения).
4. Линейно зависимые и линейно независимые системы элементов (определения).
5. Линейное многообразие (ЛМ), базис ЛМ, размерность ЛМ (определения).
6. Определение бесконечномерного ЛМ (или ЛП).
7. Прямая сумма линейных многообразий (определение).
8. Нормированное пространство (определение). Сходимость по норме и простейшие свойства.
9. Банахово пространство (определение). Подпространство нормированного пространства (определение).
10. Примеры нормированных пространств
11. Эквивалентные нормы (определение и простейшие свойства).
12. Теорема об эквивалентности норм в любом конечномерном нормированном пространстве.
13. Полнота конечномерного пространства.
14. Компактность и конечномерность. Критерий конечномерности нормированного пространства.
15. Линейное пространство со скалярным произведением (определение).
16. Неравенство Коши – Буняковского (без вывода).
17. Норма в пространстве со скалярным произведением.
18. Теорема о непрерывности скалярного произведения.
19. Определение гильбертова пространства.
20. Примеры пространств со скалярным произведением.
21. Ортогональные элементы, ортогональное дополнение множества (определения).
22. Теорема о разложении элемента в сумму проекций.
23. Ортогональные и ортонормированные системы элементов (определения).
24. Ряд в нормированном пространстве, сходящийся ряд (определения).
25. Задача о наилучшей аппроксимации (постановка задачи и ответ).
26. Коэффициенты Фурье, ряд Фурье (определения).
27. Неравенство Бесселя и теорема о сходимости ряда Фурье.
28. Замкнутая ортонормированная система элементов (определение). Критерий сходимости ряда Фурье. Пример замкнутой системы.

29. Определение полной ортонормированной системы элементов. Теорема о полной ортонормированной системе элементов.

20.2.2 Перечень вопросов к экзамену

1. Линейные операторы и функционалы (определения).
2. Теорема о линейном операторе, непрерывном в одной точке.
3. Ограниченный линейный оператор и теорема о связи ограниченности линейного оператора с его непрерывностью.
4. Теорема об ограниченности линейного оператора, определенного на конечномерном пространстве.
5. Норма линейного ограниченного оператора (определение).
6. Теорема о вычислении нормы оператора.
7. Оператор Фредгольма в пространстве $C[a,b]$ и его норма.
8. Оператор дифференцирования в $C[a,b]$ и из $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$.
9. Пространство линейных ограниченных операторов.
10. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле равномерной сходимости). Следствие для сопряженного пространства.
11. Произведение линейных операторов.
12. Сильная сходимость линейных операторов, связь с равномерной сходимостью.
13. Принцип равномерной ограниченности (лемма и теорема).
14. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле сильной сходимости).
15. Теорема о продолжении линейного оператора по непрерывности на все пространство. Обратимый и обратный операторы (определения).
16. Теорема о линейности обратного оператора.
17. Условие обратимости линейного оператора. Условие обратимости линейного оператора и ограниченности обратного.
18. Лемма об обратимости линейного оператора и обратном операторе.
19. Непрерывно обратимый оператор (определение). Следствие о непрерывно обратимом операторе.
20. Теорема Банаха о непрерывной обратимости оператора (две леммы и теорема).
21. Резольвента линейного оператора и его спектр (определения).
22. Замкнутые операторы (определение). Теорема о замкнутости ограниченного оператора.
23. Замкнутость оператора дифференцирования в $C[a,b]$.
24. Декартово произведение линейных нормированных пространств (линейные операции, норма и полнота). График линейного оператора.
25. Лемма о графике замкнутого оператора.
26. Теорема о замкнутом операторе, определенном на всем пространстве.
27. Продолжение линейного ограниченного функционала – лемма и теорема Хана - Банаха (доказательство для сепарабельного вещественного пространства).
28. Вполне непрерывные операторы (определение). Теорема о множестве вполне непрерывных операторов.
29. Теорема о вполне непрерывности оператора, определенного на конечномерном пространстве, или действующего в конечномерное пространство.
30. Вполне непрерывность оператора Фредгольма с непрерывным ядром: из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, из $L_2[a,b]$ в $C[a,b]$, из $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$.

20.2.3 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок

Обучающийся в полной мере использует фундаментальные знания в области математического анализа, функционального анализа и других дисциплин, способен к определению общих форм и закономерностей отдельной данной предметной области умеет строго доказать утверждения, формулировать результаты, быстро видит следствия полученного результата	*Повышенный уровень*	*Отлично*
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы	*Базовый уровень*	*Хорошо*
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум-трём из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы, демонстрирует частичные знания,.	*Пороговый уровень*	*Удовлетвори-тельно*
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует четырем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.	–	*Неудовлетвори-тельно*

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

Задания открытого типа

1. Как называется нормированное пространство, полное в смысле сходимости по норме?

Ответ: банахово пространство (банахово)

Решение: здесь приведено определение банахова пространства

2. Как называется пространство со скалярным произведением, полное по норме, порождённой скалярным произведением?

Ответ: гильбертово пространство (гильбертово)

Решение: здесь приведено определение гильбертова пространства

3. Вставьте одно слово: «Множество, которое содержит все свои точки прикосновения, называется _________ ».

Ответ: замкнутым (замкнутое)

Решение: здесь приведено определение замкнутого множества

4. Вставьте одно пропущенное слово: «Множество, каждая точка которого является ________, называется открытым».

Ответ: внутренней

Решение: здесь приведено определение открытого множества

5. Вставьте 3 пропущенных слова: «Метрическое пространство называется сепарабельным, если в нём существует _______ _______ _______ множество».

Ответ: счётное всюду плотное (всюду плотное счётное) или, если не использовать «ё»: счетное всюду плотное, всюду плотное счетное

Решение: здесь приведено определение сепарабельного пространства

Задания закрытого типа

1. Установите соответствие между метрическим пространством и метрикой, заданной на нём.

1	$C[a,b]$		**а**	$\rho(x,y) = \max\limits_{1\le k\le n} \lvert x_k - y_k\rvert$
2	$\mathbb{R}_p^n$		**б**	$\rho(x,y) = \max\limits_{a\le t\le b} \lvert x(t) - y(t)\rvert$
3	$l_p\ (1 \le p < \infty)$		**в**	$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lvert x_k - y_k\rvert^p\right)^{1/p}$
4	$\mathbb{R}_\infty^n$		**г**	$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lvert x_k - y_k\rvert^p\right)^{1/p}$

Ответ: 1-б, 2-в, 3-г, 4-а

Решение: задание на знание определения метрик в различных пространствах

2. Установить соответствие между обозначением метрического пространства и его словесным описанием

1	$C[a,b]$		**а**	пространство n-мерных векторов с вещественными координатами
2	$\mathbb{R}_p^n$		**б**	пространство непрерывных на отрезке [a,b] функций
3	$l_p\ (1 \le p < \infty)$		**в**	пространство n-мерных векторов с комплексными координатами
4	$\mathbb{C}_\infty^n$		**г**	пространство числовых последовательностей, суммируемых с p-ой степенью

Ответ: 1-б, 2-а, 3-г, 4-в

Решение: задание на знание обозначений основных пространств в функциональном анализе

3. Установите соответствие между началом и концом определения.

1	Множество называется открытым, если		**а**	его замыкание совпадает со всем пространством.
2	Множество называется ограниченным, если		**б**	существует замкнутый шар, содержащий это множество.
3	Множество называется всюду плотным, если		**в**	оно совпадает со своим замыканием.
4	Множество называется замкнутым, если		**г**	оно совпадает со своей внутренностью.

Ответ: 1-г, 2-б, 3-а, 4-в

Решение: вопрос на знание соответствующих определений.

4. Установите соответствие между пространством со скалярным произведением и скалярным произведением, заданным на нём.

1	$C_2[a,b]$		**а**	$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$
2	$\mathbb{R}_2^n$		**б**	$(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$
3	l_2		**в**	$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$
4	$\mathbb{C}_2^n$		**г**	$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$

Ответ: 1-б, 2-а, 3-г, 4-в

Решение: задание на знание определения скалярного произведения в различных пространствах.

5. Установите соответствие между началом и концом определения.

1	Множество называется относительно компактным, если		**а**	$\forall(\varepsilon > 0)$ для этого множества существует конечная ε-сеть.
2	Множество называется ограниченным, если		**б**	из каждой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность.
3	Множество называется компактным, если		**в**	существует замкнутый шар, содержащий это множество.
4	Множество называется вполне ограниченным, если		**г**	оно относительно компактно и замкнуто.

Ответ: 1-б, 2-в, 3-г, 4-а.

Решение: вопрос на знание соответствующих определений.

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).